با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت




# ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

**فایل مورد نیاز + ایران توشه**

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه




irantooshe.ir

t.me/irantooshe

# گام به گام ریاضی (۱) پایه دهم
# فصل ششم

عنوان فصل: شمارش، بدون شمردن

**از صفحه‌ی ۱۱۸ تا صفحه‌ی ۱۴۰ کتاب**

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل شمارش، بدون شمردن آمده است.

مباحث فصل: شمارش، جایگشت، ترکیب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

# فهرست پرسش‌ها


۱ صفحه ۱۱۸ · پرسش آغاز فصل — کمترین تعداد رنگ برای رنگ‌آمیزی نقشه ... ۵

۲ صفحه ۱۱۹ · پرسش آغاز درس — شماره‌گذاری اتومبیل با پلاک ... ۵

۳ صفحه ۱۱۹ · فعالیت — اصل جمع و اصل ضرب ..... ۵

۴ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — اصل جمع و ضرب: گل و شیرینی ... ۶

۵ صفحه ۱۲۱ · کار در کلاس — توجیه شکلی انتخاب‌های سفر با اتومبیل یا قطار ... ۷

۶ صفحه ۱۲۲ · کار در کلاس — ساختن اعداد سه رقمی با ارقام ۲، ۳ و ۵ ... ۷

۷ صفحه ۱۲۴ · تمرین — ۱ — تعداد رمزهای دستگاه، اصل جمع یا ضرب ... ۸

۸ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۲ — کارخانه‌های شهرک صنعتی ... ۹

۹ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۳ — رنگ‌آمیزی رأس‌های مثلث ... ۹

۱۰ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۴ — شماره‌گذاری اتومبیل با پلاک ... ۱۰

۱۱ صفحه ۱۲۵ · تمرین — ۵ — انواع اتومبیل ..... ۱۰

۱۲ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۶ — آزمون چندگزینه‌ای ..... ۱۱

۱۳ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۷ — مسیرهای بین شهرها ..... ۱۱

۱۴ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۸ — تکمیل مسئله ..... ۱۱

۱۵ صفحه ۱۲۶ · تمرین — ۹ — طرح مسئله با جواب ۲×۲×۲ + ۳×۳×۳ ... ۱۲

۱۶ صفحه ۱۲۷ · فعالیت — اتصال فیش‌ها به درگاه‌ها (جایگشت سه شیء) ... ۱۲

۱۷ صفحه ۱۲۷ · فعالیت — چیدن چهار عدد کنار هم و جایگشت ... ۱۳

۱۸ صفحه ۱۲۸ · کار در کلاس — ۱ — نوشتن فاکتوریل به‌صورت حاصل‌ضرب ... ۱۴

۱۹ صفحه ۱۲۸ · کار در کلاس — ۲ — محاسبهٔ عبارت‌های فاکتوریلی ... ۱۴

۲۰ صفحه ۱۲۹ · کار در کلاس — ۳ — نمایش حاصل‌ضرب‌ها با فاکتوریل ... ۱۴



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ صفحه ۱۲۹ · فعالیت — جایگشت r تایی از n شیء ..... ۱۵

۲۲ صفحه ۱۳۱ · کار در کلاس — مربی فوتبال و اعداد سه رقمی با ارقام غیرتکراری ... ۱۶

۲۳ صفحه ۱۳۱ · تمرین — ۱ — سه تیم برتر لیگ ..... ۱۶

۲۴ صفحه ۱۳۱ · تمرین — ۲ — تعداد کتاب‌ها ..... ۱۶

۲۵ صفحه ۱۳۱ · تمرین — ۳ — درست یا نادرست بودن تساوی‌های فاکتوریلی ... ۱۶

۲۶ صفحه ۱۳۲ · تمرین — ۴ — کلیدهای ماشین‌حساب ..... ۱۷

۲۷ صفحه ۱۳۲ · تمرین — ۵ — کلمه‌سازی با حروف «گل پیرا» ... ۱۷

۲۸ صفحه ۱۳۳ · فعالیت — رابطهٔ جایگشت و ترکیب ..... ۱۸

۲۹ صفحه ۱۳۶ · پرسش درون متن — چرا تعداد کمیته‌های بدون ایرانی برابر C(۵,۵) است؟ ... ۱۹

۳۰ صفحه ۱۳۶ · کار در کلاس — ۱ و ۲ — تشخیص جایگشت یا ترکیب و تعداد حالت‌ها ... ۱۹

۳۱ صفحه ۱۳۶ · کار در کلاس — ۳ — کمیتهٔ علمی ..... ۲۰

۳۲ صفحه ۱۳۶ · فعالیت — کمیتهٔ دو نفره از رشته‌های متفاوت ... ۲۰

۳۳ صفحه ۱۳۷ · فعالیت — رابطه‌های C(n,r) و C(n,n−r) و C(n,r)=C(n−1,r−1)+C(n−1,r) ... ۲۱

۳۴ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۱ — آجیل‌های فروشگاه ..... ۲۳

۳۵ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۲ — جلسهٔ ۵ نفره در اداره ..... ۲۳

۳۶ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۳ — تعداد داوطلبان مسابقات علمی ... ۲۴

۳۷ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۴ — دسته‌گل ..... ۲۴

۳۸ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۵ — ترکیب رنگ‌های نقاش ..... ۲۴

۳۹ صفحه ۱۳۹ · تمرین — ۶ — مثلث‌ها با رأس روی دایره ..... ۲۵

۴۰ صفحه ۱۴۰ · تمرین — ۷ — طعم‌های آشپز ..... ۲۵

۴۱ صفحه ۱۴۰ · تمرین — ۸ — طرح مسئله با جواب ترکیبی ... ۲۵


ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۱۱۸ پرسش آغاز فصل

**داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم‌مرز هم‌رنگ نباشند؟**

چهار رنگ کافی است. این مطلب به «قضیهٔ چهار رنگ» معروف است: هر نقشه‌ای را می‌توان با حداکثر ۴ رنگ چنان رنگ کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم‌مرز (دارای مرز مشترک، نه فقط یک نقطهٔ مشترک) همرنگ نباشند. در برخی نقشه‌ها (مثلاً چهار ناحیه که هر دو به هم مرز دارند) سه رنگ کافی نیست، پس کمترین تعداد رنگ لازم برای همهٔ نقشه‌ها برابر ۴ است.

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۲ صفحه ۱۱۹ پرسش آغاز درس

**می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به‌صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟**

شکل پلاک در متن در دسترس نیست؛ روش حل با اصل ضرب است: برای هر جایگاه پلاک (رقم یا حرف) تعداد انتخاب‌های ممکن را می‌شماریم و در هم ضرب می‌کنیم. مثلاً اگر پلاک از دو رقم، یک حرف و سه رقم و یک کد دو رقمی شهر تشکیل شود و رقم‌ها از ۱ تا ۹ و تعداد حرف‌های مجاز k باشد، تعداد پلاک‌ها برابر $۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times k \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹$ است.

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

**این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.**
irantooshe.ir
توشه ای برای موفقیت

۳ صفحه ۱۱۹ فعالیت

**۱ امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه‌سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوهٔ هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟**

**۲ هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد به‌خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟**

**۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟**

**۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟**

**۱)** پوریا فقط یکی از دو کار (رستوران یا آب‌میوه‌فروشی) را انجام می‌دهد: یا یکی از ۲ غذا یا یکی از ۳ آب‌میوه. پس تعداد انتخاب‌ها ۵ = ۳ + ۲ است.

**۲)** امین هم یک غذا (۲ حالت) و هم یک آب‌میوه (۳ حالت) دریافت می‌کند، پس ۶ = ۳ × ۲ حالت دارد: قورمه‌هویج، قورمه‌سیب، قورمه‌پرتقال، قیمه‌هویج، قیمه‌سیب و قیمه‌پرتقال.

**۳)** در سؤال اول فقط یکی از دو کار انجام می‌شود (حرف ربط «یا»)، ولی در سؤال دوم هر دو کار باید انجام شوند (حرف ربط «و»).

**۴)** در سؤال اول تعداد گزینه‌ها با هم **جمع** می‌شود (۵ = ۳ + ۲) چون کارها جدا از هم‌اند و فقط یکی انجام می‌شود؛ در سؤال دوم تعداد گزینه‌ها در هم **ضرب** می‌شود (۶ = ۳ × ۲) چون برای هر انتخاب غذا باید یک آب‌میوه هم انتخاب شود (دو مرحله پشت سر هم).

۴ صفحه ۱۲۱ کار در کلاس

**۱ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانهٔ دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و رز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟**

**۲ هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آن‌ها را بنویسید.**

**۳ در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟**

**۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.**

**۱)** فقط یکی از دو کار انجام می‌شود: ۷ = ۳ + ۴ انتخاب.

**۲)** هر دو خرید انجام می‌شود: ۱۲ = ۳ × ۴ حالت. اگر گل‌ها را م (مریم)، گ (گلایل)، ز (زنبق)، ر (رز) و شیرینی‌ها را گ‌د (گردویی)، ن (نارگیلی)، ک (کشمشی) بنامیم، حالت‌ها عبارت‌اند از:

مریم-گردویی، مریم-نارگیلی، مریم-کشمشی، گلایل-گردویی، گلایل-نارگیلی، گلایل-کشمشی، زنبق-گردویی، زنبق-نارگیلی، زنبق-کشمشی، رز-گردویی، رز-نارگیلی، رز-کشمشی.

**۳)** در قسمت (۱) از **اصل جمع** استفاده کردیم، چون فقط یکی از دو کار (گل یا شیرینی) انجام می‌شود. در قسمت (۲) از **اصل ضرب** استفاده کردیم، چون هر دو کار (خرید گل و خرید شیرینی) باید انجام شود و دو مرحله است.

**۴)** نمونه‌ها: مسئلهٔ اصل جمع: «علی می‌خواهد با یکی از ۵ کتاب داستان یا یکی از ۳ کتاب علمی سرگرم شود. او چند انتخاب دارد؟» پاسخ: ۸ = ۳ + ۵. مسئلهٔ اصل ضرب: «یک دانش‌آموز ۴ پیراهن و ۳ شلوار دارد. او به چند طریق می‌تواند یک پیراهن و یک شلوار بپوشد؟» پاسخ: ۱۲ = ۳ × ۴.

**۵** صفحه ۱۲۱ **کار در کلاس**

**فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است (از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳) و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟ حل: اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق؛ لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.**
**با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.**

شکل را به این صورت می‌کشیم: از «تهران» دو شاخهٔ اصلی خارج می‌شود: شاخهٔ «اتومبیل» و شاخهٔ «قطار».

- شاخهٔ اتومبیل: ابتدا یکی از مسیرهای a یا b تا قم (۲ حالت) و سپس از هر کدام یکی از مسیرهای ۱، ۲ یا ۳ تا اصفهان (۳ حالت) ← شش مسیر: (a, ۱)، (a, ۲)، (a, ۳)، (b, ۱)، (b, ۲)، (b, ۳).
- شاخهٔ قطار: سه مسیر مستقیم از تهران به اصفهان (قطار اول، دوم و سوم).

در شکل درختی، بخش اتومبیل ۶ برگ و بخش قطار ۳ برگ دارد. چون مسافر فقط یکی از این دو شاخه را انتخاب می‌کند، تعداد برگ‌های دو شاخه با هم جمع می‌شود: ۹ = ۳ + ۶ حالت.

**۶** صفحه ۱۲۲ **کار در کلاس**

**الف) با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این‌کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت پرکردن سه جایگاه (صدگان، دهگان، یکان) با ارقام مذکور درنظر گرفت. هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد. تعداد حالت‌ها = ..... × ..... × ..... با نمودار درختی کشیده‌شده در حاشیهٔ صفحه نیز این تعداد را به‌دست آورید و آن را تکمیل کنید.**
**ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟ ۱ــ برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟ ۲ــ حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟ ۳ــ برای پرکردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟ لذا ..... = ..... × ..... × ..... عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری وجود دارد.**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

**پ) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟ ۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به‌گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟ ۲ــ دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می‌توانند پر شوند؟ لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ..... = ..... × ..... × .....**

**ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟ ۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به‌گونه‌ای که عدد ساخته‌شده زوج باشد؟ ۲ــ پس از پرکردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ به چند طریق می‌تواند پر شود؟ ۳ــ حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پر شود؟ ۴ــ لذا تعداد اعداد موردنظر در این حالت برابر است با ..... = ..... × ..... × .....**

---

**الف)** هر یک از سه جایگاه به ۳ حالت پر می‌شود: ۲۷ = ۳ × ۳ × ۳ عدد. در نمودار درختی از ریشه ۳ شاخه (۲، ۳، ۵) برای صدگان، از هر یک ۳ شاخه برای دهگان و از هر یک دوباره ۳ شاخه برای یکان خارج می‌شود؛ پس ۲۷ برگ داریم، مانند ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۵ (برای صدگان ۲) و به همین ترتیب برای صدگان ۳ و ۵ (هر کدام ۹ عدد).

**ب)** ۱) ۳ حالت. ۲) ۲ حالت (رقم انتخاب‌شده تکرار نمی‌شود). ۳) ۱ حالت. بنابراین ۱ × ۲ × ۳ = ۶ عدد (۲۳۵، ۲۵۳، ۳۲۵، ۳۵۲، ۵۲۳، ۵۳۲).

**پ)** ۱) عدد زوج است پس یکان باید ۲ باشد: ۱ حالت. ۲) هر یک از دو جایگاه دیگر ۳ حالت دارد. لذا ۳ × ۳ × ۱ = ۹ عدد.

**ت)** ۱) یکان باید ۲ باشد: ۱ حالت. ۲) صدگان از دو رقم ۳ و ۵: ۲ حالت. ۳) دهگان: ۱ حالت. لذا ۱ × ۲ × ۱ = ۲ عدد (۳۵۲ و ۵۳۲).

---

**۷** صفحه ۱۲۴ **تمرین**

**۱ تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. مشخص کنید برای این‌کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.**

**الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.**

**ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف الفبای فارسی است.**

**پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای فارسی است.**

**ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.**

**ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.**

---

در همهٔ قسمت‌ها «عدد» یعنی یک رقم ۰ تا ۹ (۱۰ حالت)، الفبای فارسی ۳۲ حرف و الفبای انگلیسی ۲۶ حرف دارد.

**الف)** فقط یکی از دو کار: ) ۴۲ = ۳۲ + ۱۰ اصل جمع).

**ب)** ) ۳۲۰ = ۳۲ × ۱۰ اصل ضرب).

**پ)** ترتیب مشخص نشده است؛ دو حالت «عدد، حرف» و «حرف، عدد» داریم که هر کدام ۳۲۰ حالت است:
) ۶۴۰ = ۳۲۰ + ۳۲۰ هر دو اصل: جمع و ضرب).

**ت)** هر دو عدد: ۱۰۰ = ۱۰ × ۱۰؛ هر دو حرف انگلیسی: ۶۷۶ = ۲۶ × ۲۶؛ در کل
) ۷۷۶ = ۶۷۶ + ۱۰۰ هر دو اصل).

**ث)** دو عدد غیرتکراری: ۹۰ = ۹ × ۱۰؛ دو حرف انگلیسی غیرتکراری: ۶۵۰ = ۲۵ × ۲۶؛ طبق اصل ضرب: ۵۸ = ۶۵۰ × ۹۰ ,۵۰۰ (اصل ضرب).

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۸ صفحه ۱۲۵ تمرین

**۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟**

طبق تعمیم اصل ضرب:

حداقل: ۸۰۰۰ = ۲۰ × ۱۰ × ۸ × ۵ کارخانه

حداکثر: ۱۸ = ۳۰ × ۱۲ × ۱۰ × ۵۰۰۰ ,کارخانه

---

۹ صفحه ۱۲۵ تمرین

**۳ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.**

**الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟**

**ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم‌رنگ نباشند.**

**پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.**

(شکل: مثلثی که هر سه رأس آن با ضلع‌ها به هم وصل‌اند.)

**الف)** هر رأس را به ۲ حالت می‌توان رنگ کرد: ۸ = ۲ × ۲ × ۲ حالت.

**ب)** هر سه رأس دو به دو به هم وصل‌اند، یعنی باید سه رنگ متفاوت داشته باشند، ولی فقط دو رنگ داریم؛ پس ۰ حالت (هیچ رنگ‌آمیزی مجازی وجود ندارد).

**پ)** با ۳ رنگ: حالت (الف): ۲۷ = ۳ × ۳ × ۳. حالت (ب): رأس اول ۳ حالت، رأس دوم (متفاوت از اول) ۲ حالت و رأس سوم (متفاوت از دو رنگ قبلی) ۱ حالت: ۶ = ۱ × ۲ × ۳.

---

۱۰ صفحه ۱۲۵ تمرین

**۴ با پلاک‌هایی به‌صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آن‌ها از مجموعهٔ A انتخاب شود و سایر ارقام از مجموعهٔ B انتخاب شوند و حرف استفاده‌شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟**

$A = \{۱۱, ۲۲, ..., ۹۹\}$

$B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$

**و C مجموعهٔ حروف ب، ج، د، س، ص، ط، ق، ل، م، ن، و، ه، ی است.**

شکل پلاک در متن در دسترس نیست؛ فرض می‌کنیم پلاک به‌صورت معمول ایران باشد: دو رقم، یک حرف، سه رقم و در سمت راست یک عدد دو رقمی (کد). یعنی ۵ رقم از مجموعهٔ B (هر کدام ۹ حالت)، یک حرف از C (۱۳ حرف) و عدد دو رقمی از A (۹ حالت):

$۹ \times ۹ \times ۱۳ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ = ۹ \times ۱۳ \times ۹^۵ = ۶\,۹۰۸\,۷۳۳$

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۱۱ صفحه ۱۲۵ تمرین

**۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیراتوماتیک) تولید می‌شود.**

**الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟**

**ب) اگر یکی از رنگ‌های تولیدشده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟**

**پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟**

**الف)** ۳۰۰ = ۲ × ۳ × ۱۰ × ۵ نوع.

**ب)** رنگ ثابت است (۱ حالت): ۳۰ = ۲ × ۳ × ۱ × ۵ نوع.

**پ)** رنگ و دنده ثابت‌اند: ۱۵ = ۱ × ۳ × ۱ × ۵ نوع.

۱۲ صفحه ۱۲۶ تمرین

**۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله ــ خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:**

**الف) مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟**

**ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟**

**الف)** هر سؤال ۴ گزینه‌ای ۴ حالت و هر سؤال ۲ گزینه‌ای ۲ حالت دارد:

$$۴^{۱۰} \times ۲^{۵} = ۲^{۲۵} = ۳۳\,۵۵۴\,۴۳۲$$

**ب)** اگر بتواند سؤالی را بی‌پاسخ بگذارد، هر سؤال یک حالت بیشتر دارد (۵ حالت برای سؤال‌های ۴ گزینه‌ای و ۳ حالت برای سؤال‌های ۲ گزینه‌ای):

$$۵^{۱۰} \times ۳^{۵} = ۹\,۷۶۵\,۶۲۵ \times ۲۴۳ = ۲\,۳۷۳\,۰۴۶\,۸۷۵$$

۱۳ صفحه ۱۲۶ تمرین

**۷ اگر شکل مقابل نشان‌دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟**

شکل در متن در دسترس نیست و تعداد جاده‌ها مشخص نیست. روش حل: برای هر مسیر ممکن (مثلاً A→B→E یا A→C→D→E)، تعداد جاده‌های هر قطعه را در هم ضرب می‌کنیم (اصل ضرب)؛ سپس تعداد حالت‌های مسیرهای مختلف را با هم جمع می‌کنیم (اصل جمع).

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۱۴ صفحه ۱۲۶ تمرین

**۸ مسئلهٔ زیر را به‌گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه‌شده، درست باشد.**

**مسئله: چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت؛ به‌طوری‌که .....؟**

**حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط موردنظر وجود دارد.**

یکان ۵ حالت و دهگان (که صفر نمی‌تواند باشد) ۴ حالت دارد. «تمام ارقام آن زوج باشند» این شرط را می‌دهد: ارقام زوج ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ هستند؛ یکان ۵ حالت و دهگان (غیر از ۰) ۴ حالت.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

**مسئلهٔ کامل‌شده:** چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت به‌طوری‌که هر دو رقم آن زوج باشند؟ (جواب: ۴ × ۵ = ۲۰)

۱۵ صفحه ۱۲۶ تمرین

**۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آن‌ها حل شود و جواب آن به‌صورت زیر باشد.**

۲ × ۲ × ۲ + ۳ × ۳ × ۳ = ۳۵

**مسئلهٔ پیشنهادی:** یک رمز سه‌کاراکتری یا فقط از حروف مجموعهٔ {الف، ب} ساخته می‌شود (هر کاراکتر یکی از این دو حرف) یا فقط از ارقام مجموعهٔ {۱، ۲، ۳} (هر کاراکتر یکی از این سه رقم). چند رمز ممکن است؟

**حل:** حالت اول: ۲ × ۲ × ۲ = ۸. حالت دوم: ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷. چون فقط یکی از دو حالت رخ می‌دهد (اصل جمع): ۸ + ۲۷ = ۳۵.

۱۶ صفحه ۱۲۷ فعالیت

**سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟**

**۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آن‌ها را در مربع‌های زیر بنویسید.**

**۲ آیا در سه مربع به‌هم‌چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟**

**۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به‌دست آورد؟**

**۱)** حالت‌ها (۶ حالت): abc، acb، bac، bca، cab، cba.

**۲)** خیر؛ هر فیش فقط یک بار استفاده می‌شود و حرفی تکرار نمی‌شود.

**۳)** مربع اول ۳ حالت، مربع دوم ۲ حالت (یک حرف مصرف شده) و مربع سوم ۱ حالت دارد: ۳ × ۲ × ۱ = ۶.

**پاسخ به پرسش ابتدایی:** ۶ حالت وجود دارد. شرکت‌های تولیدی برای پیدا کردن راحت‌تر حالت درست، فیش‌ها و درگاه‌های متناظر را با رنگ یا شکل یا اندازهٔ یکسان از هم متمایز می‌کنند، به‌طوری‌که هر فیش فقط در درگاه خودش جا برود (یا هر دو را با یک رنگ مشخص می‌کنند).

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۷ صفحه ۱۲۷ فعالیت

**به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟ می‌خواهیم مسئلهٔ قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است.**

**۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟ ــ پس از پرشدن اولین مربع چند عدد چیده‌نشده باقی مانده است؟ ــ حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ سومین و چهارمین مربع را چطور؟ ــ حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با ..... × ..... × ..... × .....**

**بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل‌ضرب ..... × ..... × ..... × .....**

**۲ به‌نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به‌ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟**

**۳ تعداد کلمات هفت‌حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)**

**۴ با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟**

**۵ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟**

**۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل‌ضرب نشان دهید.**

---

**۱)** مربع اول ۴ روش؛ سپس ۳ عدد باقی می‌ماند، مربع دوم ۳ روش، مربع سوم ۲ روش و مربع چهارم ۱ روش. تعداد حالت‌ها: $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$. پس تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز برابر $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ است.

**۲)** $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

**۳)** $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۵۰۴۰$ کلمه.

**۴)** $۸۸۰۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳۶۲$, عدد.

**۵)** $۶۲۸,۸۰۰ \times ۱ = ۳ \dots ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times$, جایگشت.

**۶)** $n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \dots ۱ \times ۲ \times$ ؛ که آن را $n!$ (n فاکتوریل) می‌نامیم.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱۸ صفحه ۱۲۸ کار در کلاس

**۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.**

**الف** $۷۲۰ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۶!$ **ب** $= ۸!$ ..... **پ** $= ۱۰!$ ..... **ت** $= n!$ .....

**الف)** $۷۲۰ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۶ \times ۵! = ۶!$

**ب)** $۴۰ = ۸ \times ۷! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۸!$ ,۳۲۰

**پ)** $۳ = ۹! \times ۱۰ = ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۰!$ ,۶۲۸,۸۰۰

**ت)** $n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \dots ۳! \times ۲ \times ۱ = n \times (n-۱)!$

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۱۹ صفحه ۱۲۸ کار در کلاس

**۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

**الف)** $\frac{۵!}{۴!}$ **ب)** $\frac{۱۰!}{۹!}$ **پ)** $\frac{n!}{(n-۱)!}$

**ت)** $\frac{۸!}{۶!}$ **ث)** $\frac{۱۰!}{۸!}$ **ج)** $\frac{n!}{(n-۲)!}$

**چ)** $\frac{۸!}{۵!}$ **ح)** $\frac{۱۰!}{۷!}$ **خ)** $\frac{n!}{(n-۳)!}$

**د)** $\frac{n!}{(n-۴)!}$ **ذ)** $\frac{n!}{(n-۵)!}$ **ر)** $\frac{n!}{(n-k)!}$

**الف)** $۵ = \frac{۵ \times ۴!}{۴!}$ **ب)** $۱۰ = \frac{۱۰ \times ۹!}{۹!}$ **پ)** $n = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!}$

**ت)** $۵۶ = ۷ \times ۸$ **ث)** $۹۰ = ۹ \times ۱۰$ **ج)** $n(n-۱)$

**چ)** $۳۳۶ = ۶ \times ۷ \times ۸$ **ح)** $۷۲۰ = ۸ \times ۹ \times ۱۰$ **خ)** $n(n-۱)(n-۲)$

**د)** $(n-۳)(n-۲)(n-۱)n$ **ذ)** $(n-۴)(n-۳)(n-۲)(n-۱)n$

**ر)** $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)$

(در هر مورد، فاکتوریل بزرگ‌تر را تا جایی که با فاکتوریل مخرج یکی شود باز می‌کنیم و ساده می‌کنیم.)

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۲۰ صفحه ۱۲۹ کار در کلاس

**۳ حاصل‌ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.**

**الف** $9! / 7! = 9 \times 8$ **ب)** $9 \times 8 \times 7 \times 6$ **پ)** $11 \times 10 \times 9$ **ت)** ۸ **ث)** $n(n-1)$ **ج)** $n(n-1)(n-2)(n-3)$

**ب)** $\frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6$ **پ)** $\frac{11!}{8!} = 11 \times 10 \times 9$

**ت)** $\frac{8!}{7!} = 8$ **ث)** $\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$

**ج)** $\frac{n!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$

(قسمت (الف) نمونه است: $9! / 7! . = 9 \times 8$)

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

**۲۱** صفحه ۱۲۹ فعالیت

**۱ تعداد کلمات هفت‌حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با .....**

**۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه‌حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به‌دست آوریم. برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمهٔ سه‌حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دوم و سوم حرف چطور؟ بنابراین تعداد کلمات سه‌حرفی موردنظر برابر است با ..... در واقع آنچه به‌دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.**

**۳ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید.**

**۴ اعداد به‌دست‌آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.**

**۵ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.**

**۶ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز** $(0 \le r \le n)$ **را به‌دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.**

**۱)** $7! = 5040$

**۲)** انتخاب اول ۷ حالت، انتخاب دوم ۶ حالت و انتخاب سوم ۵ حالت: $7 \times 6 \times 5 = 210$

**۳)** $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

**۴)** $\frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ $\quad \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

**۵)** $\frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$

**۶)** $P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

(برای $7! / 4!$ داریم $7 - 3 = 4$؛ برای $9! / 5!$ داریم $9 - 4 = 5$.)

**۲۲** صفحه ۱۳۱ | کار در کلاس

**۱ یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیشرو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟**

**۲ با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟**

**۱)** پست‌ها متفاوت‌اند و ترتیب مهم است: $P(۶,\ ۴) = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۶۰$ حالت.

**۲)** انتخاب ۳ رقم از ۴ رقم با ترتیب: $P(۴,\ ۳) = ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$ عدد.

**۲۳** صفحه ۱۳۱ | تمرین

**۱ در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟**

ترتیب مهم است: $P(۱۸,\ ۳) = ۱۸ \times ۱۷ \times ۱۶ = ۴۸۹۶$ حالت.

**۲۴** صفحه ۱۳۱ | تمرین

**۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟**

$$P(n, ۳) = n(n-۱)(n-۲) = ۲۱۰ = ۷ \times ۶ \times ۵$$

چون تابع $n(n-۱)(n-۲)$ برای $n \geq ۳$ صعودی است، تنها جواب $n = ۷$ است. پس ۷ کتاب وجود دارد.

**۲۵** صفحه ۱۳۱ | تمرین

**۳ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟**

$\frac{۸!}{۴!} = ۲!$ $\quad (۳!)^۲ = ۹!$ $\quad ۲ \times ۳! = ۶!$ $\quad ۸! = ۴! \times ۲!$ $\quad ۶! = ۶ \times ۵!$ $\quad ۶! = ۳! + ۳!$

$۳! + ۳! = ۶!$ : نادرست ($۱۲ \neq ۷۲۰$).

$۵! \times ۶ = ۶!$ : درست ($۱۲۰ \times ۶ = ۷۲۰$).

$۲! \times ۴! = ۸!$ : نادرست ($۴۸ \neq ۴۰۳۲۰$).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$۶! = ۳! \times ۲$ : نادرست ($۷۲۰ \neq ۱۲$).

$۹! = (۳!)^۲$ : نادرست ($۳۶۲۸۸۰ \neq ۳۶$).

$۲! = ۴!/۸!$ : نادرست ($۲ \neq ۱۶۸۰$).

(دو مورد آخر به‌دلیل ناخوانا بودن متن بازسازی شده‌اند.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

**۲۶** صفحه ۱۳۲ **تمرین**

**۴ در یک نوع ماشین‌حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید موردنظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور موردنظر را اجرا کند؟**

---

تعداد حالت‌های ممکن $۶۸۴۰ = ۱۸ \times ۱۹ \times ۲۰ = P(۲۰, ۳)$ است. در بدترین حالت باید همهٔ آن‌ها را امتحان کند:

$۱۳ = ۲ \times ۶۸۴۰$ ثانیه, $۶۸۰$ ثانیه $= ۲۲۸$ دقیقه $= ۳$ ساعت و ۴۸ دقیقه.

---

**۲۷** صفحه ۱۳۲ **تمرین**

**۵ با حروف کلمهٔ «گل پیرا» و بدون تکرار حروف**

**الف) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «گل» شروع می‌شود؟**

**ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟**

**پ) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟**

**ت) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟**

**ث) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمهٔ «پیرا» کنار هم آمده باشند؟**

---

حروف: گ، ل، پ، ی، ر، ا (۶ حرف متمایز).

**الف)** $۷۲۰ = ۶!$ کلمه. با «گل» شروع‌شده: دو حرف اول مشخص‌اند و ۴ حرف دیگر به $۲۴ = ۴!$ حالت چیده می‌شوند: ۲۴ کلمه.

**ب)** $۳۶۰ = ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = P(۶, ۴)$ کلمه.

**پ)** «پ» و «ر» را یک حرف حساب می‌کنیم: $۵!$ جایگشت، و دو حالت «پر» و «رپ»: $۲۴۰ = ۵! \times ۲$ کلمه.

**ت)** جایگاه دو حرف چسبیده در کلمهٔ ۴ حرفی ۳ حالت دارد (جایگاه‌های ۱-۲، ۲-۳ یا ۳-۴)؛ ترتیب «پر» یا «رپ»: ۲ حالت؛ دو جایگاه باقی‌مانده با ۴ حرف دیگر: $P(۴, ۲) = ۱۲$. جواب: $۳ \times ۲ \times ۱۲ = ۷۲$ کلمه.

**ث)** چهار حرف «پیرا» را یک بلوک می‌گیریم که $۴! = ۲۴$ حالت درونی دارد. بلوک و یک حرف دیگر (گ یا ل: ۲ انتخاب) را به $۲! = ۲$ حالت می‌چینیم: $۲ \times ۲ \times ۲۴ = ۹۶$ کلمه.

(همهٔ این اعداد با شمارش مستقیم رایانه‌ای هم تأیید شده‌اند.)

---

**۲۸** صفحه ۱۳۳ **فعالیت**

**۱ همان‌طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تعداد $P(۵, ۳) = ۶۰$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیرتکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از: (جدول ۱۰ ستونی از اعداد ۱۲۳، ۱۳۲، ۲۱۳، ۲۳۱، ۳۱۲، ۳۲۱ و ... تا ستون ۳۴۵، ۳۵۴، ۴۳۵، ۴۵۳، ۵۳۴، ۵۴۳). به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟**

**۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آن‌ها را بنویسید. {۱, ۲, ۳} و .....**

**۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های موردنظر آن‌ها را متمایز کرد؟**

**۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی از فعالیت ۲ را به‌دست می‌دهد؟**

**۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ این عدد را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟**

---

**۱)** شش عدد هر ستون از یک مجموعهٔ سه‌تایی یکسان از رقم‌ها ساخته شده‌اند و فقط ترتیب رقم‌هایشان فرق دارد (مثلاً ستون ۱۲۳: ۱۲۳، ۱۳۲، ۲۱۳، ۲۳۱، ۳۱۲، ۳۲۱).

**۲)** از هر ستون یک زیرمجموعه می‌گیریم. ۱۰ زیرمجموعهٔ سه‌عضوی داریم:

{۱,۲,۳}، {۱,۲,۴}، {۱,۲,۵}، {۱,۳,۴}، {۱,۳,۵}، {۱,۴,۵}، {۲,۳,۴}، {۲,۳,۵}، {۲,۴,۵}، {۳,۴,۵}

**۳)** در فعالیت ۱ ترتیب قرارگرفتن رقم‌ها مهم است (۱۲۳ با ۳۲۱ فرق دارد)، ولی در فعالیت ۲ ترتیب اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.

**۴)** هر ستون دقیقاً یک زیرمجموعهٔ سه‌عضوی را مشخص می‌کند.

**۵)** بر ۶ (تعداد اعضای هر ستون)، یعنی $۶ \div ۶۰ = ۱۰$. عدد ۶ همان تعداد جایگشت‌های سه شیء یعنی $۳!$ است.

۲۹ صفحه ۱۳۶ پرسش درون متن

**اما تعداد افراد دستهٔ دوم (کمیته‌های ۵ نفره‌ای که هیچ داور ایرانی در آن‌ها نیست) برابر $C(۵, ۵)$ است. چرا؟**

۹ داور داریم که ۴ نفرشان ایرانی‌اند؛ پس ۵ داور غیرایرانی وجود دارد. اگر هیچ ایرانی در کمیته نباشد، هر ۵ عضو کمیته باید از این ۵ داور انتخاب شوند، یعنی باید هر ۵ نفر را برداریم و این کار فقط به $C(۵, ۵) = ۱$ روش ممکن است. بنابراین جواب «حداقل یک ایرانی» برابر $۱۲۶ - ۱ = ۱۲۵$ است.

۳۰ صفحه ۱۳۶ کار در کلاس

**۱ در کدام‌یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام‌یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟**

**الف) ساختن کلمه‌ای سه‌حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی‌معنی).**

**ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.**

**پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست‌ها توانایی بازی دارند.**

**ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.**

**ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.**

**ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده‌اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به‌ترتیب مدال‌های طلا، نقره و برنز داده شود.**

**۲ در هر کدام از موارد «کار در کلاس ۱» تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده‌کردن جواب نیست)**

| مورد | ترتیب مهم است؟ | نوع | تعداد حالت‌ها |
|---|---|---|---|
| الف | بله | جایگشت | $P(۵, ۳) = ۶۰$ |
| ب | خیر | ترکیب | $C(۵, ۳) = ۱۰$ |
| پ | بله (پست‌ها فرق دارند) | جایگشت | $P(۷, ۳) = ۲۱۰$ |
| ت | خیر | ترکیب | $C(۷, ۳) = ۳۵$ |
| ث | خیر | ترکیب | $C(۱۰, ۳) = ۱۲۰$ |
| ج | بله (مدال‌ها فرق دارند) | جایگشت | $P(۱۰, ۳) = ۷۲۰$ |

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

**۳۱** صفحه ۱۳۶ | کار در کلاس

**۳ از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:**

**الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟**

**ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟**

**پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟**

**الف)** $C(۸, ۲) \times C(۶, ۲) \times C(۵, ۲) = ۲۸ \times ۱۵ \times ۱۰ = ۴۲۰۰$

**ب)** کمیتهٔ ۳ نفره از ۳ رشته با حداقل یک نفر از هر رشته، یعنی دقیقاً یک نفر از هر رشته:

$۸ \times ۶ \times ۵ = ۲۴۰$

**پ)** همهٔ کمیته‌های ۲ نفره از ۱۹ نفر: $C(۱۹, ۲) = ۱۷۱$ ؛ کمیته‌های بدون ریاضی‌دان (از ۱۱ نفر): $C(۱۱, ۲) = ۵۵$. جواب: $۱۷۱ - ۵۵ = ۱۱۶$

**۳۲** صفحه ۱۳۶ | فعالیت

**از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیتهٔ دو نفره انتخاب شود، به‌گونه‌ای که دو نفر انتخاب‌شده هم‌رشته نباشند. چند حالت برای انجام این‌کار وجود دارد؟ به جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا (محمد: $۴ + ۴ + ۴ = ۱۲$ ؛ پژمان: $C(۳, ۲) \times ۲ \times ۲ = ۱۲$ ؛ حمید: $۶ \times ۴ = ۲۴$) دقت کنید.**

**ــ دو نفر مدرس ریاضی را M۱ و M۲، دو نفر مدرس فیزیک را P۱ و P۲، و دو نفر مدرس شیمی را C۱ و C۲ درنظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آن‌ها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.**

**نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط‌بودن آن را مشخص کنید.**

همهٔ ۱۲ حالت (کمیته‌های دو نفره از دو رشتهٔ متفاوت):

ریاضی-فیزیک:

img:m_b6dc04489b:8.13

،

img:m_d859e4382c:8.13

،

img:m_d9259a450e:8.13

،

img:m_6ac7506fdf:8.13

ریاضی-شیمی:

img:m_4431352b72:8.13

توشه‌ای برای موفقیت

،

img:m_376ccffbfb:8.13

،

img:m_a606f07d0e:8.13

،

img:m_f2aedd8430:8.13

فیزیک-شیمی:

img:m_41fc66f61a:8.13

،

img:m_9934de0e03:8.13

،

img:m_9985aae0a8:8.13

،

img:m_d760dc60fe:8.13

پس جواب درست **۱۲** است (جواب محمد و پژمان درست است) و جواب حمید (۲۴) **غلط** است.

**نمودار درختی جواب حمید:** ریشه ← ۶ شاخه برای نفر اول (M۱, M۲, P۱, P۲, C۱, C۲) و از هر شاخه ← ۴ شاخه برای نفر دوم (هم‌رشتهٔ نفر اول نباشد). مثلاً از M۱ شاخه‌های P۱، P۲، C۱، C۲ و از P۱ شاخه‌های M۱، M۲، C۱، C۲ خارج می‌شود؛ در نتیجه ۲۴ برگ داریم.

**علت غلط‌بودن:** در آن ترتیب انتخاب مهم گرفته شده است. مثلاً مسیرهای (M۱ سپس P۱) و (P۱ سپس M۱) یک کمیتهٔ یکسان

img:m_b6dc04489b:8.13

را نشان می‌دهند، پس هر کمیته دو بار شمرده شده است. جواب درست برابر ۱۲ = ۲ ÷ ۲۴ است.

۳۳ صفحه ۱۳۷ فعالیت

**۱ می‌دانیم که C(n, r) همان تعداد زیرمجموعه‌های r تایی از یک مجموعهٔ n عضوی است. حال C(n, ۰)، C(n, ۱) و C(n, n) را یک‌بار با توجه به این تعبیر و یک‌بار با فرمول به‌دست آورید.**

**۲ الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ با پرکردن جدول (ستون‌های «به زمین می‌روند» و «به زمین نمی‌روند») تمام حالات را نمایش دهید.**

**ب) این بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟**

**پ) بین تعداد انتخاب‌های C(۵, ۲) و C(۵, ۳) چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟**

**ت) تساوی درستی C(n, r) = C(n, n - r) را یک‌بار با استفاده از توجیه بالا و یک‌بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.**

**۳ جاهای خالی را پر کنید.**

**الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ حروف انگلیسی برابر است با: .....**

**ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ حروف انگلیسی که حرف a در آن‌ها هست برابر است با: .....**

**پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ حروف انگلیسی که حرف a در آن‌ها نیست، برابر است با: .....**

**ت) بنابراین: ..... = ..... + .....**

**۴ فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)**

**الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ A برابر است با: .....**

**ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها هست، برابر است با: .....**

**پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آن‌ها نیست، برابر است با: .....**

**ت) بنابراین: ..... = ..... + .....**

---

**۱)** $C(n, n) = \frac{n!}{n!\ 0!} = 1$ ; $C(n, 1) = \frac{n!}{1!\ (n-1)!} = n$ ; $C(n, 0) = \frac{n!}{0!\ n!} = 1$

با تعبیر زیرمجموعه: فقط یک زیرمجموعهٔ تهی داریم ($r = 0$) ؛ زیرمجموعه‌های تک‌عضوی n تا هستند ($r = 1$) ؛ و تنها یک زیرمجموعهٔ n عضوی (خود مجموعه) وجود دارد.

**۲ الف)** $C(5, 3) = 10$ حالت:

| به زمین می‌روند | به زمین نمی‌روند |
|---|---|
| ۱، ۲، ۳ | ۴، ۵ |
| ۱، ۲، ۴ | ۳، ۵ |
| ۱، ۲، ۵ | ۳، ۴ |
| ۱، ۳، ۴ | ۲، ۵ |
| ۱، ۳، ۵ | ۲، ۴ |
| ۱، ۴، ۵ | ۲، ۳ |
| ۲، ۳، ۴ | ۱، ۵ |
| ۲، ۳، ۵ | ۱، ۴ |
| ۲، ۴، ۵ | ۱، ۳ |
| ۳، ۴، ۵ | ۱، ۲ |

**ب)** ستون دوم جدول: دو بازیکن نیمکت‌نشین: {۴,۵}، {۳,۵}، {۳,۴}، {۲,۵}، {۲,۴}، {۲,۳}، {۱,۵}، {۱,۴}، {۱,۳}، {۱,۲} — یعنی $C(5, 2) = 10$ حالت.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

**پ)** ۱۰ = $C(۵, ۳) = C(۵, ۲)$. توجیه: انتخاب ۳ بازیکنی که به زمین می‌روند، یکی‌به‌یک با انتخاب ۲ بازیکنی که نمی‌روند متناظر است (هر انتخاب، دیگری را مشخص می‌کند).

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , \quad C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

پس $C(n, r) = C(n, n-r)$؛ از نظر تعبیر نیز انتخاب r عضو برای «برداشتن» با انتخاب n−r عضو برای «کنار گذاشتن» برابر است.

**۳ الف)** $C(۲۶, ۵)$ **ب)** $C(۲۵, ۴)$ (a را برمی‌داریم و ۴ حرف دیگر را از ۲۵ حرف باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم) **پ)** $C(۲۵, ۵)$ (۵ حرف را از ۲۵ حرف غیر از a انتخاب می‌کنیم)

**ت)** $C(۲۶, ۵) = C(۲۵, ۴) + C(۲۵, ۵)$

**۴ الف)** $C(n, r)$ **ب)** $C(n-۱, r-۱)$ **پ)** $C(n-۱, r)$

**ت)** $C(n, r) = C(n-۱, r-۱) + C(n-۱, r)$

---

۳۴ صفحه ۱۳۹ تمرین

**۱ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمهٔ کدو، تخمهٔ ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟**

۷ نوع تنقلات داریم و باید ۵ یا ۶ یا ۷ نوع را انتخاب کنیم (ترتیب مهم نیست):

$C(۷, ۵) + C(۷, ۶) + C(۷, ۷) = ۲۱ + ۷ + ۱ = ۲۹$ نوع آجیل.

---

۳۵ صفحه ۱۳۹ تمرین

**۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:**

**الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟**

**ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟**

**پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟**

**الف)** رئیس: ۱ حالت؛ یک کارشناس حقوقی از ۳ نفر: ۳ حالت؛ ۳ نفر دیگر از ۱۴ نفر باقی‌مانده (۱۸ − ۱ − ۳ = ۱۴ نفر که رئیس و حقوقی نیستند): $C(۱۴, ۳) = ۳۶۴$. جواب: ۳ × ۳۶۴ = ۱۰۹۲

**ب)** رئیس ۱ حالت، معاون ۳ حالت، کارشناس حقوقی ۳ حالت؛ ۲ نفر دیگر از ۱۱ نفر (۱۸ - ۱ - ۳ - ۳)، که نه رئیس‌اند، نه معاون و نه حقوقی: $C(11, 2) = 55$. جواب: $55 \times 3 \times 3 = 495$

**پ)** رئیس ۱ حالت، معاون ۳ حالت، حسابدار ۲ حالت، حقوقی ۳ حالت؛ یک نفر دیگر از ۹ نفر (کارشناس اداری ۶ و کارگزینی ۳): ۹ حالت. جواب: $9 \times 3 \times 2 \times 3 = 162$

**۳۶** صفحه ۱۳۹ **تمرین**

**۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟**

$$C(n, 2) = \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \times 7 \Rightarrow n = 8$$

(جواب منفی $n = -7$ قابل قبول نیست.) پس ۸ داوطلب وجود داشته است.

**۳۷** صفحه ۱۳۹ **تمرین**

**۴ گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته‌گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته‌گل مختلف می‌تواند درست کند؟**

$C(10, 3) + C(10, 4) + C(10, 5) = 120 + 210 + 252 = 582$ دسته‌گل.

**۳۸** صفحه ۱۳۹ **تمرین**

**۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به‌دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟**
**چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟**

باید ۲ یا ۳ یا ۴ رنگ از ۴ رنگ را ترکیب کنیم: $C(4, 2) + C(4, 3) + C(4, 4) = 6 + 4 + 1 = 11$ رنگ جدید (و با احتساب ۴ رنگ اصلی، ۱۵ رنگ).

**علت:** در محاسبهٔ ما فقط «انتخاب رنگ‌ها» شمرده شده و مقدار (نسبت) هر رنگ در ترکیب یکسان فرض شده است. در عمل می‌توان رنگ‌ها را با نسبت‌های مختلف (مثلاً دو قسمت قرمز و یک قسمت آبی یا برعکس) مخلوط کرد و همچنین رنگ را با سفید و... روشن یا تیره کرد؛ هر نسبت، فام جدیدی می‌سازد.

۳۹ صفحه ۱۳۹ تمرین

**۶ هفت نقطهٔ A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟**

هر سه نقطه از روی دایره (که هیچ سه‌تایی‌شان هم‌خط نیستند) یک مثلث می‌سازد و ترتیب انتخاب مهم نیست: $C(۷, ۳) = ۳۵$ مثلث.

۴۰ صفحه ۱۴۰ تمرین

**۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه**

**الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟**

**ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟**

**پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟**

**ت) ادویه‌ها به ۲ دستهٔ ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ‌یک از ادویه‌های دستهٔ اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دستهٔ دوم سازگاری ندارند؟**

**الف)** $C(۱۰, ۳) = ۱۲۰$

**ب)** حالت‌هایی که هر دو ادویهٔ ناسازگار در آن‌ها هستند: سومین ادویه از ۸ تای دیگر، یعنی ۸ حالت. جواب: $۱۲۰ - ۸ = ۱۱۲$

**پ)** فقط یک حالت (خود آن سه ادویه) ممنوع است: $۱۲۰ - ۱ = ۱۱۹$

**ت)** هر طعم باید کاملاً از یک دسته باشد: $۲ \times C(۵, ۳) = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$

۴۱ صفحه ۱۴۰ تمرین

**۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:**

**الف** $C(۶, ۲) \times C(۵, ۳)$ **ب** $C(۵, ۳) + C(۶, ۲)$

(ارقام ۵، ۶، ۳، ۲ از متن ناخوانا بازسازی شده‌اند.)

**الف)** در یک گروه ۵ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان هستند. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره شامل ۳ ریاضی‌دان و ۲ فیزیک‌دان انتخاب کرد؟ (هر دو کار باید انجام شود، اصل ضرب) جواب: $C(۵, ۳) \times C(۶, ۲) = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

**ب)** به چند طریق می‌توان کمیته‌ای انتخاب کرد که یا فقط شامل ۳ نفر از ۵ ریاضی‌دان باشد یا فقط شامل ۲ نفر از ۶ فیزیک‌دان؟ (فقط یکی از دو کار، اصل جمع) جواب: $C(۵, ۳) + C(۶, ۲) = ۱۰ + ۱۵ = ۲۵$

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

**این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.**

irantooshe.ir